Canguru Matemático sem Fronteiras 2025

Categoria: Estudante — Duração: 1h 30min

Destinatários: alunos do 12.º ano de escolaridade

Nome: ______________________________ Turma: __________

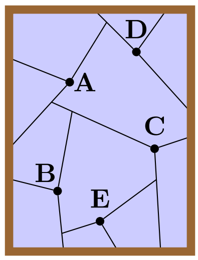
Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada resposta correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada resposta errada és penalizado em 1/4 dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. O número 2025 é um quadrado perfeito porque $2025 = 45^2$. Quantos anos passarão até ao próximo ano cujo número seja também um quadrado perfeito?

(**A**) 25 (**B**) 91 (**C**) 121 (**D**) 500 (**E**) 2025

2. Um estudante atirou cinco pedras, uma após a outra, que atingiram uma janela nos pontos A, B, C, D e E, como se pode ver na figura ao lado. Onde cada pedra atinge o vidro, têm início algumas fissuras lineares que param numa fissura anterior ou no limite do vidro. Por que ordem é que o estudante atirou as pedras?



(**A**) $DACBE$ (**B**) $ABCDE$ (**C**) $BDACE$
(**D**) $BCDAE$ (**E**) $DCABE$

3. O Vasco tem 20 bolas de cores diferentes, amarelas ou verdes ou azuis ou pretas. Destas, exatamente 17 não são verdes, exatamente 15 não são pretas e exatamente 12 não são amarelas. Quantas bolas são azuis?

(**A**) 8 (**B**) 7 (**C**) 6 (**D**) 4 (**E**) 3

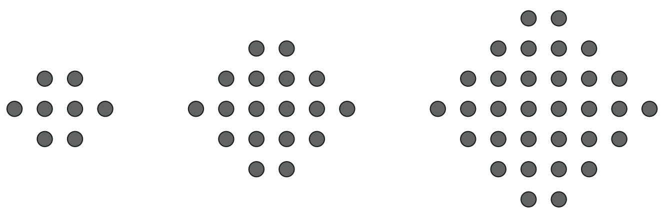
4. Em que intervalo se encontra o número 88×888?

(**A**) Entre 8 e 88 (**B**) Entre 88 e 888 (**C**) Entre 888 e 8 888
(**D**) Entre 8 888 e 88 888 (**E**) Entre 88 888 e 888 888

5. Qual dos seguintes números é igual à raiz quadrada de 16^{16}?

(**A**) 4^4 (**B**) 4^8 (**C**) 4^{16} (**D**) 8^8 (**E**) 16^4

6. As formas da figura são as três primeiras formas de uma sequência. Quantos pontos constituem a quinta forma da sequência?



(**A**) 72 (**B**) 74 (**C**) 76 (**D**) 78 (**E**) 80

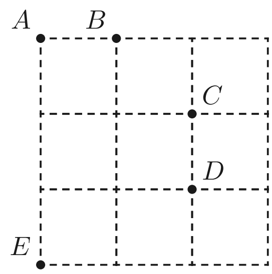
7. O Miguel dividiu o número $\sqrt{11}$ por três e obteve o número x. Na reta numérica, onde é que o número x se encontra?

(**A**) Entre 0 e 1 (**B**) Entre 1 e 2 (**C**) Entre 2 e 3
(**D**) Entre 3 e 4 (**E**) Entre 4 e 5

8. As barras de chocolate preferidas da Sílvia vêm em pacotes. Antes, cada pacote continha cinco barras. Agora contém apenas quatro, mas é vendido ao mesmo preço. Em que percentagem é que o preço de cada barra aumentou?

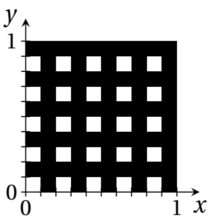
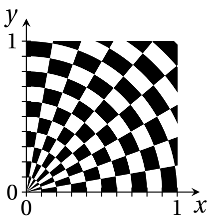
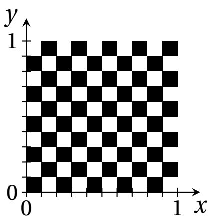
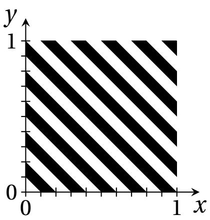
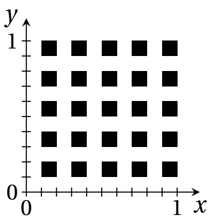
(**A**) Em 10% (**B**) 20% (**C**) 25% (**D**) 30% (**E**) 50%

9. O Roberto quer escolher quatro dos cinco pontos assinalados na figura ao lado, de modo a que as distâncias entre cada par de pontos sejam todas diferentes. Qual dos pontos A, B, C, D e E deve ser removido?



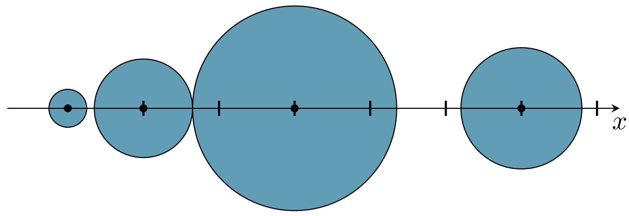
(**A**) A (**B**) B
(**C**) C (**D**) D
(**E**) E

10. No plano xy, na região definida por $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$, alguns pontos são pintados de preto. O ponto (x, y) é pintado de preto se, tanto para x como para y, o algarismo das décimas for ímpar. Qual é o aspeto do resultado?

(**A**) 
(**B**) 
(**C**) 
(**D**) 
(**E**) 

Problemas de 4 pontos

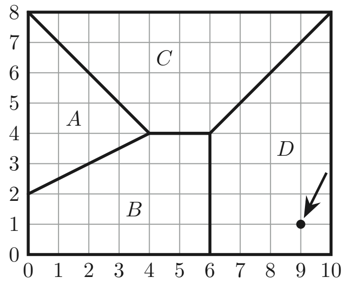
11. Quatro discos circulares com raios positivos r_1, r_2, r_3 e r_4 estão centrados em $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(3, 0)$ e $(6, 0)$. Os discos podem tocar-se mas não sobrepor-se, como se pode ver no exemplo ilustrado ao lado. Qual é o maior valor possível para $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$?



(**A**) 3 (**B**) 4 (**C**) 5 (**D**) 6
(**E**) Não há limite máximo

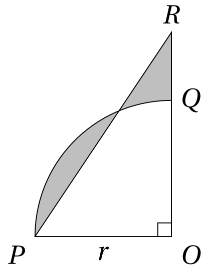
12. Entre 10 números inteiros positivos diferentes, há exatamente cinco que são divisíveis por 5 e exatamente sete que são divisíveis por 7. Seja M o maior destes números. Qual é o menor valor possível de M?

(**A**) 105 (**B**) 77 (**C**) 75 (**D**) 63 (**E**) Outro valor



13. O mapa mostra uma pequena cidade que tem 4 escolas. No mapa, as regiões A, B, C e D são constituídas por todos os pontos mais próximos, respetivamente, de cada escola. As coordenadas da escola na região D são $(9,1)$. Quais são as coordenadas da escola na região A?

(**A**) $(0,4)$ (**B**) $(1,4)$
(**C**) $(1,5)$ (**D**) $(1,6)$
(**E**) $(2,4)$

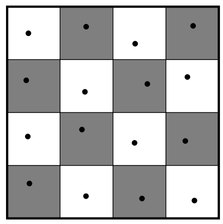


14. O diagrama ao lado mostra um quarto do círculo de centro em O e que contém os pontos P e Q e um triângulo $[OPR]$. As duas regiões sombreadas têm a mesma área. Qual é o comprimento de $[OR]$?

(**A**) $\frac{\pi r}{2}$ (**B**) $\frac{3r}{2}$ (**C**) πr (**D**) $\frac{2}{\pi}$ (**E**) $\frac{\pi}{2r}$

15. Qual é o menor número inteiro positivo N tal que $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{N}}}$ é um número inteiro?

(**A**) $2^{12} \times 3^6$ (**B**) $2^4 \times 3^{14}$ (**C**) $2^4 \times 3^6 \times 5^8$
(**D**) $2^4 \times 3^2$ (**E**) Nenhuma das opções anteriores

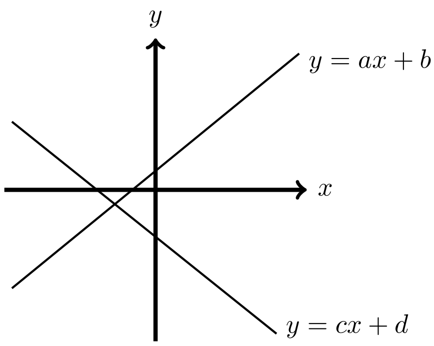


16. Num tabuleiro de xadrez gigante 4×4 há 16 cangurus, um em cada casa. Em cada jogada, cada um dos cangurus salta para uma casa vizinha (para cima, para baixo, para a esquerda ou para a direita, mas não na diagonal). Todos os cangurus permanecem no tabuleiro. Pode haver vários cangurus em qualquer casa. Após 100 jogadas, qual é o maior número possível de casas vazias?

(**A**) 15 (**B**) 14 (**C**) 12 (**D**) 10 (**E**) 8

17. O número de cinco algarismos $N18NN$ é divisível por 18. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

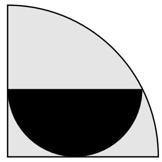
(**A**) Existe exatamente um valor possível para N
(**B**) Existem exatamente dois valores possíveis para N
(**C**) Existem exatamente três valores possíveis para N
(**D**) Não existe N nestas condições
(**E**) Existem mais de três valores possíveis para N



18. Um aluno desenhou os gráficos de duas funções afins num sistema de coordenadas, como se mostra ao lado. A expressão $ab + cd - (ac + bd)$ é sempre

(**A**) Negativa (**B**) Não positiva (**C**) Positiva
(**D**) Igual a zero (**E**) Nenhuma das opções anteriores é verdadeira

19. A área do semicírculo preto é 12 cm^2. Qual é a área do quarto de círculo grande?



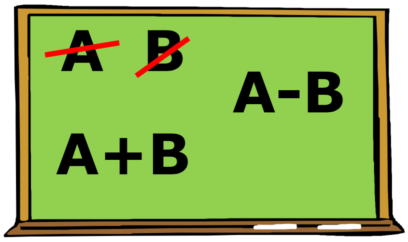
(**A**) 42 cm^2 (**B**) 36 cm^2 (**C**) 32 cm^2 (**D**) 30 cm^2 (**E**) 25 cm^2

20. Quando a avó do João começou a tricotar meias de lã, tinha um enorme novelo de fio com um diâmetro de 30 cm. Depois de terminar 70 meias com o mesmo tamanho, ainda tem um novelo com um diâmetro de 15 cm. Quantas mais meias com o mesmo tamanho das anteriores pode a avó do João tricotar com o fio que sobrou?

(**A**) 70 (**B**) 50 (**C**) 30 (**D**) 20 (**E**) 10

Problemas de 5 pontos

21. Um aluno começa com dois números escritos no quadro. De seguida, apaga-os e escreve a soma e a diferença positiva desses dois números. Se começar com os números 3 e 5 e repetir o processo 50 vezes, com que números vai ficar?

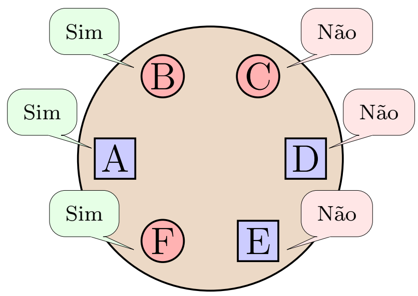


(**A**) 3^{25} e 5^{25} (**B**) 3^{50} e 5^{50} (**C**) 2×3^{25} e 2×5^{25}
(**D**) 3×2^{25} e 5×2^{25} (**E**) Nenhuma das opções anteriores

22. O João escreveu um número inteiro arbitrário de dois algarismos num quadro. De seguida, apagou o último algarismo do número. Como resultado, o número inteiro inicial diminuiu em p%. Qual dos seguintes números está mais próximo do maior valor possível de p?

(**A**) 10 (**B**) 50 (**C**) 90 (**D**) 95 (**E**) 99

23. Um grupo de três homens quadrados de Marte e um grupo de três homens circulares de Júpiter estão sentados à volta de uma mesa, como mostra a figura ao lado. Um dos seis tem a chave do seu disco voador. Todos os membros de um grupo dizem sempre a verdade e todos os membros do outro grupo mentem sempre. Aos seis foi feita a pergunta “Uma das pessoas que está sentada ao teu lado tem a chave?”. As suas respostas estão representadas na figura. Quem tem a chave?

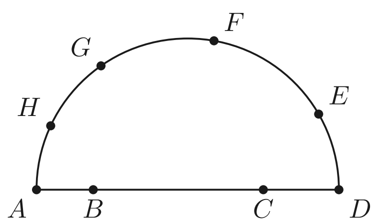


(**A**) A (**B**) B (**C**) C (**D**) D (**E**) E

24. A Júlia e a sua irmã mais nova, a Paula, saem juntas para um passeio de bicicleta. Ambas seguem o mesmo caminho e andam a uma velocidade constante: a Júlia a 18 km/h e a Paula a 12 km/h. A Júlia sente-se cansada ao fim de 20 minutos e decide voltar para trás. Quando encontra a Paula, a Júlia diz-lhe para dar meia volta e ambas regressam a casa, cada uma à sua velocidade. Quantos minutos depois da Júlia, a Paula chegará a casa?

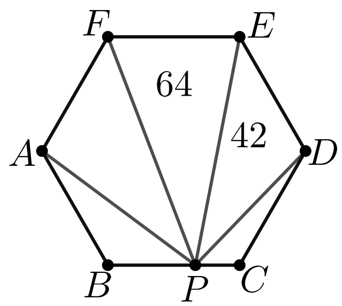
(**A**) 4 (**B**) 6 (**C**) 8 (**D**) 10 (**E**) 15

25. Num semicírculo de diâmetro $[AD]$, os pontos B e C estão sobre o diâmetro e os pontos E, F, G e H estão sobre o arco do semicírculo. Quantos triângulos podem ser formados com os vértices em três destes oito pontos?



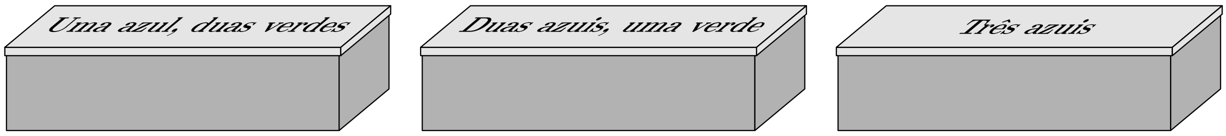
(**A**) 15 (**B**) 50 (**C**) 51 (**D**) 52 (**E**) 54

26. No diagrama está representado um hexágono regular $[ABCDEF]$. O ponto P é um ponto de $[BC]$ tal que a medida da área do triângulo $[PEF]$ é 64 e a medida da área do triângulo $[PDE]$ é 42. Qual é a medida da área do triângulo $[APF]$?



(**A**) 53 (**B**) 54
(**C**) 56 (**D**) 60
(**E**) 64

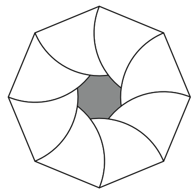
27. Três caixas contêm três bolas cada uma. As inscrições nas tampas indicam o conteúdo de cada caixa. As tampas são permutadas de modo a que nenhuma delas mostre corretamente o conteúdo.



O Manuel escolhe uma caixa, retira dela uma bola ao acaso e regista a sua cor sem a voltar a colocar na caixa. Qual é o menor número de bolas que o Manuel precisa de retirar para determinar o conteúdo de cada caixa?

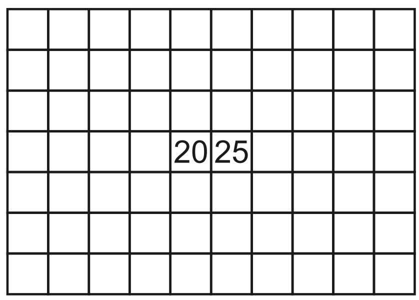
(**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3 (**E**) 4

28. A figura ao lado mostra um octógono regular de lado 1 cm. Foi desenhado um arco de raio 1 cm centrado em cada vértice, como se pode observar. Qual é o perímetro da região sombreada?



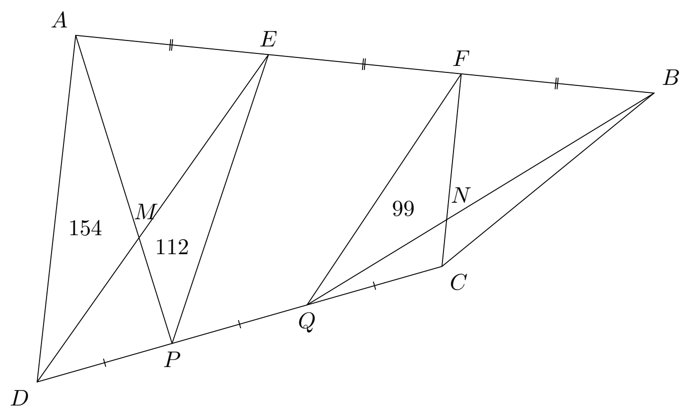
(**A**) π cm (**B**) $\frac{2\pi}{3}$ cm (**C**) $\frac{8\pi}{9}$ cm
(**D**) $\frac{4\pi}{5}$ cm (**E**) $\frac{3\pi}{4}$ cm

29. A Patrícia escreveu um número em cada célula de uma tabela 7×10. A soma de todos os números em qualquer retângulo 3×4 ou 4×3 é zero. Os números escritos em duas das células são mostrados no diagrama. Qual é a soma de todos os números na tabela?



(**A**) -5 (**B**) -20 (**C**) -25
(**D**) -45 (**E**) Não é possível saber

30. Os lados $[AB]$ e $[CD]$ do quadrilátero convexo $[ADCB]$ estão divididos em três partes pelos pontos E, F, P e Q de modo a que $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ e $\overline{DP} = \overline{PQ} = \overline{QC}$. As diagonais de $[ADPE]$ e $[FQCB]$ intersetam-se em M e N, respetivamente. As medidas das áreas dos triângulos $[ADM]$, $[EMP]$ e $[FQN]$ são $154, 112$ e 99, respetivamente. Qual é a medida da área do triângulo $[BNC]$?



(**A**) 57 (**B**) 70 (**C**) 72
(**D**) 86 (**E**) 141