



Canguru Matemático sem Fronteiras 2012

<http://www.mat.uc.pt/canguru/>

Categoria: Estudante
Destinatários: alunos do 12.º ano de escolaridade

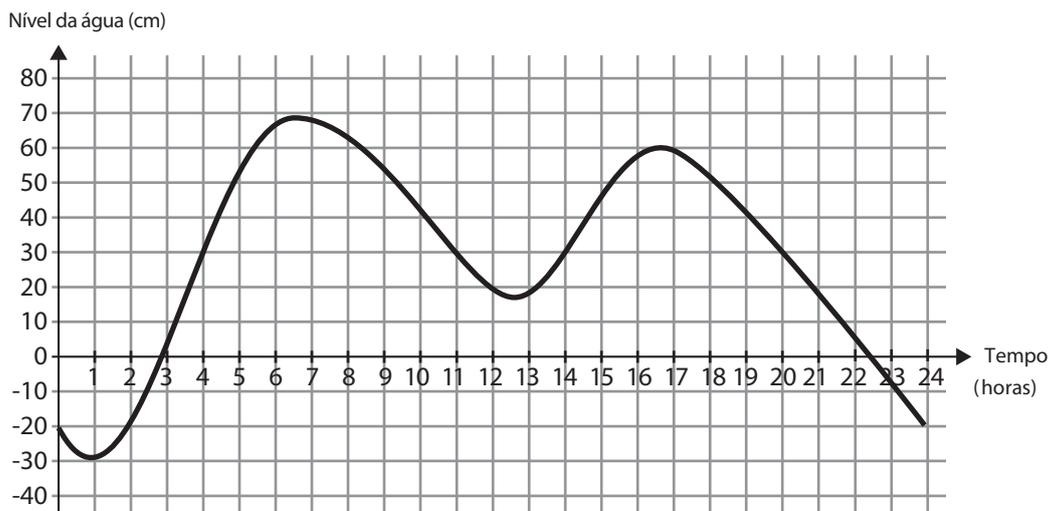
Duração: 1h 30min

Nome: _____ Turma: _____

Não podes usar calculadora. Em cada questão deves assinalar a resposta correta. As questões estão agrupadas em três níveis: Problemas de 3 pontos, Problemas de 4 pontos e Problemas de 5 pontos. Inicialmente tens 30 pontos. Por cada questão correta ganhas tantos pontos quantos os do nível da questão, no entanto, por cada questão errada és penalizado em $1/4$ dos pontos correspondentes a essa questão. Não és penalizado se não responderes a uma questão, mas infelizmente também não adicionas pontos.

Problemas de 3 pontos

1. O nível da água numa cidade portuária subiu e desceu em determinado dia de acordo com o gráfico na figura. Nesse dia, quantas horas esteve o nível da água acima dos 30 cm?



- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 9 (E) 13

2. O número $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ é igual a

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt[6]{4}$ (D) $\sqrt[3]{4}$ (E) 2

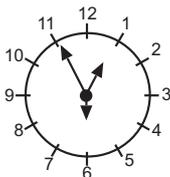


3. Numa lista de cinco números, o primeiro número é 2 e o último número é 12. O produto dos primeiros três números é 30, o produto dos três números do meio é 90 e o produto dos últimos três números é 360. Qual é o número que está no meio da lista?

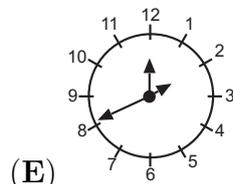
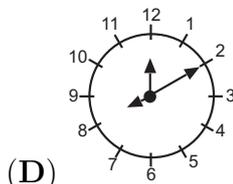
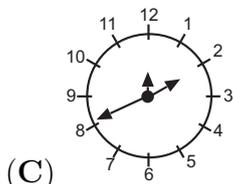
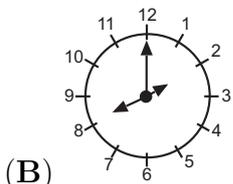
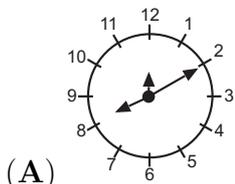


- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 10

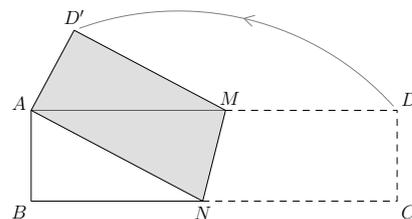
4. Num relógio, os ponteiros das horas, minutos e segundos têm tamanhos diferentes, mas não sabemos qual é qual. Sabemos que o relógio funciona bem e que às 12h 55min 30s, os ponteiros estavam na posição indicada na figura.



Em que posição estarão os ponteiros do relógio quando forem 8h 10min?



5. A tira retangular de papel $[ABCD]$ de dimensões $4 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$, representada na figura, é dobrada ao longo da reta MN de modo a que os vértices A e C fiquem sobrepostos. Qual é a área do quadrilátero $[ANMD']$?



- (A) 28 cm^2 (B) 30 cm^2 (C) 32 cm^2 (D) 48 cm^2 (E) 56 cm^2

6. A soma dos nove algarismos de um número é 8. Qual é o produto desses nove algarismos?

- (A) 0 (B) 1 (C) 8 (D) 9 (E) $9!$

7. O maior número inteiro n que satisfaz $n^{200} < 5^{300}$ é

- (A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 11 (E) 12

8. Qual das seguintes funções satisfaz a equação

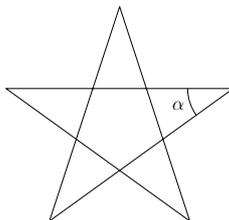
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}?$$

- (A) $f(x) = \frac{2}{x}$ (B) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ (C) $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ (D) $f(x) = \frac{1}{x}$ (E) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

9. Um número real x satisfaz $x^3 < 64 < x^2$. Qual das afirmações é verdadeira?

- (A) $0 < x < 64$ (B) $-8 < x < 4$ (C) $x > 8$ (D) $-4 < x < 8$ (E) $x < -8$

10. A partir de um pentágono regular, construiu-se a estrela de cinco pontas da figura. Qual é a amplitude do ângulo α ?



- (A) 24° (B) 30° (C) 36° (D) 45° (E) 72°

Problemas de 4 pontos

11. A minha idade é um número inteiro de dois algarismos, que é uma potência de base 5, e a idade do meu primo é um número inteiro de dois algarismos, que é uma potência de base 2. A soma dos algarismos das nossas idades é um número ímpar. Qual é o produto dos algarismos das nossas idades?

- (A) 240 (B) 2010 (C) 60 (D) 50 (E) 300

12. Uma agência de viagens organizou quatro passeios opcionais em Coimbra, para um grupo de turistas. Cada um dos passeios teve uma taxa de participação de 80%. A percentagem dos turistas que participaram em todos os passeios é, no mínimo, igual a:

- (A) 80% (B) 60% (C) 40% (D) 20% (E) 16%

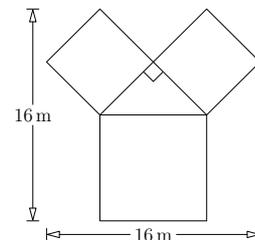
13. O conjunto das soluções da inequação $|x| + |x - 3| > 3$ é

- (A) $] -\infty, 0[\cup] 3, +\infty[$ (B) $] -3, 3[$ (C) $] -\infty, -3[$
 (D) $] -3, +\infty[$ (E) o conjunto dos números reais

14. Nas escolas da Eslovénia as notas estão repartidas por cinco níveis, de 1 (a melhor) a 5 (a pior). Numa dessas escolas, um teste não correu satisfatoriamente aos alunos da turma do 4.º ano. A média das notas dos alunos foi 4. Os resultados dos rapazes foram um pouco melhores do que os das raparigas; a média dos resultados dos rapazes foi 3,6 enquanto que a média dos resultados das raparigas foi 4,2. Qual das seguintes afirmações acerca da turma está correta?

- (A) O número de rapazes é o dobro do número de raparigas
 (B) O número de rapazes é o quádruplo do número de raparigas
 (C) O número de raparigas é o dobro do número de rapazes
 (D) O número de raparigas é o quádruplo do número de rapazes
 (E) O número de raparigas é igual ao número de rapazes

15. A imagem mostra o plano de um canteiro de roseiras. Nos dois quadrados geometricamente iguais crescem rosas brancas e no terceiro quadrado crescem rosas vermelhas. No triângulo retângulo crescem rosas amarelas. Sabendo que o canteiro está inscrito num quadrado de lado 16 m, qual é a área do canteiro?

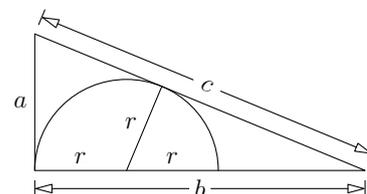


- (A) 114 m² (B) 130 m² (C) 144 m² (D) 160 m² (E) 186 m²

16. Num cinema, foram vendidos todos os bilhetes para as primeiras filas. Os lugares destas filas estão numerados com números naturais consecutivos, começando com o número 1. Por engano, foram vendidos dois bilhetes para um mesmo lugar numa destas filas. A soma dos números dos lugares dos bilhetes vendidos para estas filas é igual a 857. Qual é o número do lugar para o qual foram vendidos os dois bilhetes?

- (A) 4 (B) 16 (C) 25 (D) 37 (E) 42

17. É dado um triângulo retângulo escaleno cujos lados têm medidas de comprimento a , b e c , como indicado na figura. Qual é o raio r do semicírculo inscrito no triângulo representado na figura?

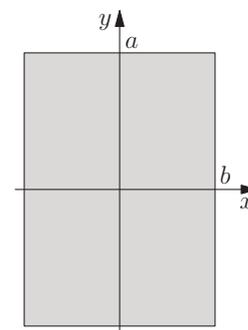


- (A) $\frac{a(c-a)}{2b}$ (B) $\frac{ab}{a+b+c}$ (C) $\frac{ab}{b+c}$ (D) $\frac{2ab}{a+b+c}$ (E) $\frac{ab}{a+c}$

18. Um quadrado $[ABCD]$ tem lados com medida de comprimento igual a 2. Os pontos médios dos lados $[AB]$ e $[AD]$ são E e F , respetivamente. Designamos por G um ponto de $[CF]$ tal que $3\overline{CG} = 2\overline{GF}$. A medida da área do triângulo $[BGE]$ é:

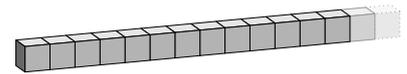
- (A) $\frac{7}{10}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{8}{5}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{6}{5}$

19. Seja $a > b$. Se o retângulo na figura for rodado em torno do eixo das abcissas obtém-se um sólido E_x com volume $\text{Vol}(E_x)$. Se o retângulo for rodado em torno do eixo das ordenadas obtém-se um sólido E_y com volume $\text{Vol}(E_y)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?



- (A) $E_x = E_y$ e $\text{Vol}(E_x) = \text{Vol}(E_y)$ (B) $E_x = E_y$, mas $\text{Vol}(E_x) \neq \text{Vol}(E_y)$
 (C) $E_x \neq E_y$ e $\text{Vol}(E_x) > \text{Vol}(E_y)$ (D) $E_x \neq E_y$ e $\text{Vol}(E_x) < \text{Vol}(E_y)$
 (E) $E_x \neq E_y$, mas $\text{Vol}(E_x) = \text{Vol}(E_y)$

20. Um Canguru quer construir uma fila com dados idênticos (num dado a soma das pintas em lados opostos é 7). Ele pode colar duas faces que tenham o mesmo número de pintas e quer que o número total de pintas nas faces exteriores dos dados na fila seja 2012. De quantos dados vai precisar o Canguru?



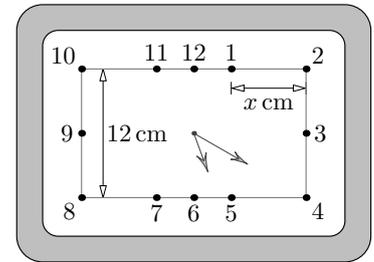
- (A) 70 (B) 71 (C) 142 (D) 143
 (E) É impossível obter 2012 pintas

Problemas de 5 pontos

21. Qual é a menor amplitude possível de um ângulo de um triângulo isósceles $[ABC]$ que tem uma mediana que divide o triângulo em dois triângulos isósceles?

- (A) 15° (B) $22,5^\circ$ (C) 30° (D) 36° (E) 45°

22. O relógio na figura tem forma retangular e cada ponteiro move-se a uma velocidade constante. A distância entre os números 8 e 10 no mostrador é de 12 cm e a distância entre 1 e 2 é de x cm. Qual é o valor de x ?



- (A) $3\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) $2 + \sqrt{3}$ (E) $12 - 3\sqrt{3}$

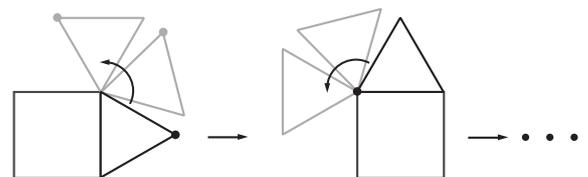
23. Considere duas operações que podem ser executadas numa fração:

- (i) aumentar o numerador em 8 unidades;
- (ii) aumentar o denominador em 7 unidades.

Começando com a fração $\frac{7}{8}$ e, após ter realizado um total de n operações deste tipo, obtemos uma fração de igual valor. Qual é o menor valor possível para n ?

- (A) 56 (B) 81 (C) 109 (D) 113
 (E) Não existe n nestas condições

24. Um triângulo equilátero roda sem deslizar em torno de um quadrado com lado de comprimento 1 (ver figura). Qual é o comprimento do caminho que o ponto marcado percorre até que o triângulo e o ponto voltem às suas posições iniciais?



- (A) 4π (B) $\frac{28}{3}\pi$ (C) 8π (D) $\frac{14}{3}\pi$ (E) $\frac{21}{2}\pi$

25. Escreveram-se todos os números $abcd$ com algarismos a, b, c, d todos diferentes e pertencentes ao conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Quantos destes números têm a propriedade de o resultado da operação

$$a \times b + b \times c + c \times d + d \times a$$

ser divisível por 3?

- (A) 8 (B) 12 (C) 14 (D) 16 (E) 24

26. Depois de uma aula de Matemática, ficou o seguinte no quadro: o gráfico da função $y = x^2$ e 2012 retas paralelas à reta $y = x$, cada uma das quais intersesta a parábola em dois pontos. A soma das abscissas dos pontos de interseção das retas e da parábola é:

- (A) 0 (B) 1 (C) 1006 (D) 2012
(E) impossível determinar

27. Três vértices de um cubo (não todos na mesma face) são $P(3, 4, 1)$, $Q(5, 2, 9)$ e $R(1, 6, 5)$. Que ponto é o centro do cubo?

- (A) $A(4, 3, 5)$ (B) $B(2, 5, 3)$ (C) $C(3, 4, 7)$ (D) $D(3, 4, 5)$ (E) $E(2, 3, 5)$

28. Na sequência $1, 1, 0, 1, -1, \dots$, os dois primeiros termos, a_1 e a_2 , são iguais a 1. O terceiro termo é a diferença dos dois termos precedentes, isto é, $a_3 = a_1 - a_2$. O quarto termo é a soma dos dois termos precedentes, isto é, $a_4 = a_2 + a_3$. Os restantes termos são obtidos de forma análoga: $a_5 = a_3 - a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$, e assim sucessivamente. Qual é a soma dos primeiros 100 termos desta sequência?

- (A) 0 (B) 3 (C) -21 (D) 100 (E) -1

29. A Joana escolheu dois números a e b do conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 26\}$. O produto $a \times b$ é igual à soma dos restantes 24 números. Qual é o valor de $|a - b|$?

- (A) 10 (B) 9 (C) 7 (D) 2 (E) 6

30. Cada gato no País das Maravilhas ou é sábio ou é louco. Se um gato sábio estiver numa sala com 3 gatos loucos passa a louco. Se um gato louco estiver numa sala com 3 gatos sábios, é denunciado por eles como louco. Três gatos entraram numa sala vazia. Alguns instantes após a entrada do 4.º gato sai o 1.º gato. Alguns instantes após a entrada do 5.º gato sai o 2.º gato, e assim sucessivamente. Depois do 2012.º gato ter entrado, pela primeira vez um dos gatos foi denunciado como louco e não entrou mais gato algum. Nesse momento, dos 2012 gatos, quais dos seguintes gatos podem ser ambos loucos?

- (A) O 1.º e o 2011.º (B) O 2.º e o 2010.º
(C) O 3.º e o 2009.º (D) O 4.º e o último
(E) O 2.º e o 2011.º